——論　文——

制限付き無向グラフの同型性

片岳　格[†]　　守谷　哲夫[††]

On graph isomorophism for some undirected graph classes.

Itaru KATAOKA[†] and Tetsuo MORIYA[††]

あらまし　グラフの同型性判定問題は，グラフ理論上重要な問題であり，同型性判定問題が NP-完全であるかどうかは未解決である．本論文では２つの無向グラフの同型性について考察する．まず無向グラフに対して隣接次数表と最小サイクル表という概念を導入する。これらを使って位数が７個以下の２つの無向グラフが同型であるための条件をしめす．隣接次数表を求めるのに必要な計算時間は $O(n^3)$、最小サイクル表を求めるののに必要な計算時間は $O(n^4)$ である。グラフの位数に制限を付けずに形状に Λ グラフという制限を付けたグラフが同型であるための必要十分条件を与える．

キーワード　無向グラフ，グラフの同型性，補グラフ

1. まえがき

グラフの同型性判定問題は，グラフ理論における最も重要な問題の一つでありこれまで多くの研究がなされてきた. [4] ～ [12]

一般に２つの無向グラフの同型性判定問題が，NP-完全か否かは未解決である [13]．また，与えられた２つの無向グラフ G,H に対して G の部分グラフが H と同型か否かを判定することは NP-完全であることが知られている [1]．グラフに制限を付けた結果としては，G が森で H が木のときは線形時間アルゴリズムが存在する [3]．有向グラフでは，G がサイクルを含み H が有向木であるときは NP-完全であることが知られている [2].

本論文では，無向グラフの同型性について考察する．無向グラフ G に対し G の隣接次数表（各頂点の隣接する頂点の次数のリスト）$\Delta(G)$，最小サイクル表（各辺を含む最小サイクルの長さのリスト）$\rho(G)$ という概念を導入する．まず，隣接次数表を用いて，グラフの位数に制限を付けずに形状に Λ グラフという制限を付けたグラフが同型であるための必要十分条件をあたえる．最小サイクル表を求めるののに必要な計算時間は $O(n^4)$ である。次に最小サイクル表を使って，位数が７個以下の２つの無向グラフが同型であるための必要十分条件をあたえる．隣接次数表を求めるのに必要な計算時間は $O(n^3)$ である。

[†] 国士舘大学工学研究科，東京都
Kokushikan Univ.
[††] 国士舘大学工学部，東京都
Kokushikan Univ.

2. 準　　備

本論文で扱うグラフは全て無向グラフ（以下グラフと呼ぶ）である．グラフ G は，G の頂点の集合 $V(G)$ と辺の集合 $E(G)$ からなる．辺 $e \in E(G)$ を $e=(u,v)$ と記す．本論文で扱うグラフは $e=(u,u)$ のように同一の頂点間の辺は存在しない．また同じ組み合わせの頂点間には１本しか辺が存在しないものとする．

グラフ G に対して，頂点の集合を $V(G) = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$，辺の集合を $E(G) = \{e_0, e_1, ..., e_{m-1}\}$ とする．

２つのグラフ G_0, G_1 が $(u,v) \in E(G_1)$ ならば $(\phi(u), \phi(v)) \in E(G_0)$ でありまた逆も成り立つような全単射 : ϕ が存在するとき G_0 と G_1 が同型であるといい，$G_0 \simeq G_1$ と表現する．

本論文では，多重集合 A に含まれる元 x の個数を $\#(x, A)$ と表記する．

頂点 $v \in V(G)$ に隣接する頂点の集合を $Adj(v,G) = \{u | u \in V(G), (v,u) \in E(G)\}$ とする．また頂点 v の次数を $deg(v,G) = |Adj(v,G)|$ とする．

グラフ G_0, G_1 に対して全単射 $\phi : V(G_1) \to V(G_0)$ が存在するとする．また $v \in V(G_1), deg(v, G_1) = j$ に